مشتق تابع $y=\tan(x)$ با استفاده از تعریف مشتق

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(\tan(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}-\tan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{\tan x}+\tan h-\cancel{\tan x}+\tan^2 x\tan h}{1-\tan x\tan h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan h+\tan^2 x\tan h}{h(1-\tan x\tan h)}=$$

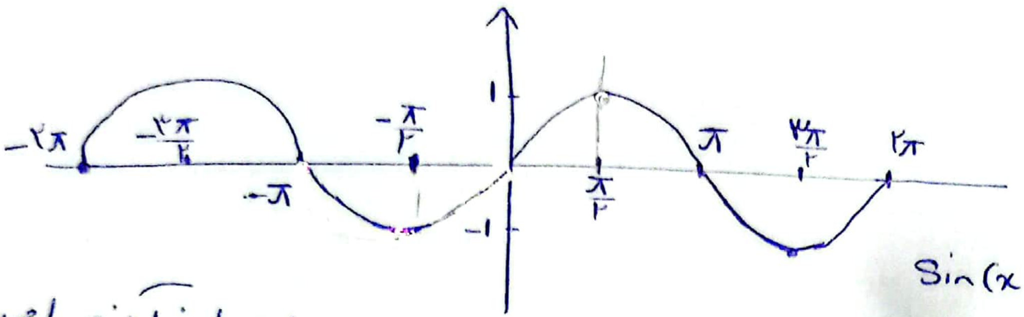
$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan h(1+\tan^2 x)}{h(1-\tan x\tan h)}=(1+\tan^2 x)\lim_{h\to 0}\overset{1}{\cancel{\frac{\tan h}{h}}}\lim_{h\to 0}\overset{1}{\cancel{\frac{1}{(1-\tan x\tan h)}}}$$

$$=1+\tan^2 x$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

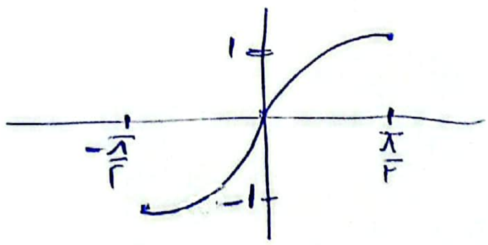
$y=\sin x \qquad \underset{\text{دامنه}}{D} = \mathbb{R} \qquad \underset{\text{برد}}{R} = [-1,1]$



مشاهده می کنیم که $\sin(x)$ یک به یک نیست بنابراین برای اینکه وارون آن را بدست بیاوریم باید دامنه آن را محدود کنیم بنابراین دامنه را بازه بسته $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ در نظر می‌گیریم تا یک به یک شود

$\underset{\text{دامنه}}{D} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \underset{\text{برد}}{R} = [-1,1]$

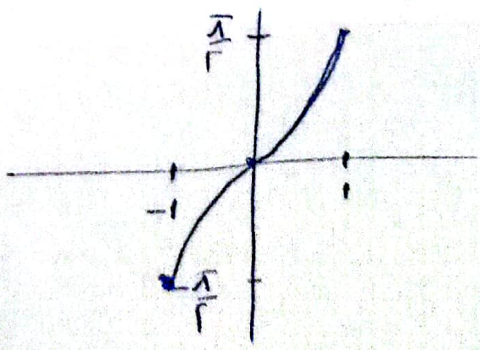
$y=\sin(x) \longrightarrow$



$y=\sin^{-1}(x) = \operatorname{Arc}\sin(x) \Longrightarrow D=[-1,1] \ , \ R=[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin(0)=0 \Longrightarrow \sin^{-1}(0)=0 \qquad \sin(\frac{\pi}{2})=1 \Longrightarrow \sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$

$\sin(-\frac{\pi}{2})=-1 \Longrightarrow \sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$



$y=\sin(x) \Longrightarrow y'=\cos(x)$

$y=\sin(u) \Longrightarrow y'=u'\cos(u)$

$y=\sin^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\sin(x) \Longrightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

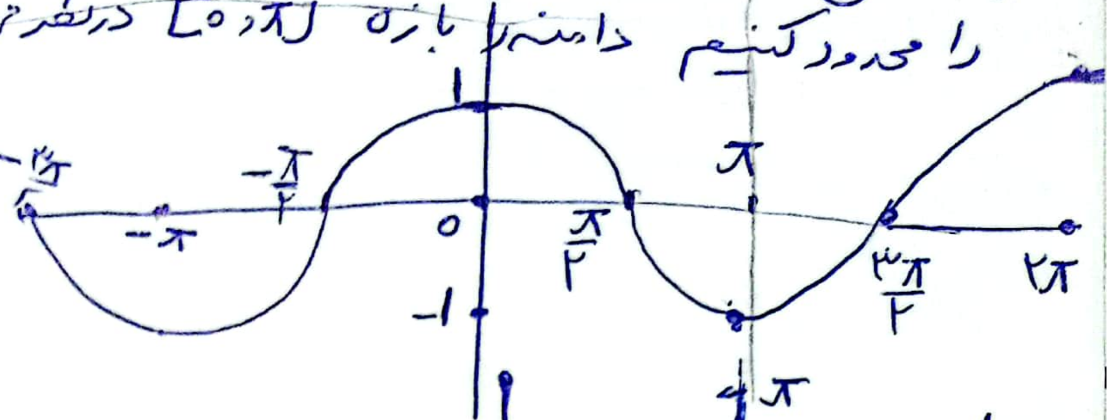
$y=\sin^{-1}(u)=\operatorname{Arc}\sin(u) \Longrightarrow y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$-\frac{\pi}{2}$

چون تابع $y=\cos(x)$ یک به یک نیست باید دامنه را محدود کنیم دامنه را بازه $[0,\pi]$ در نظر می‌گیریم

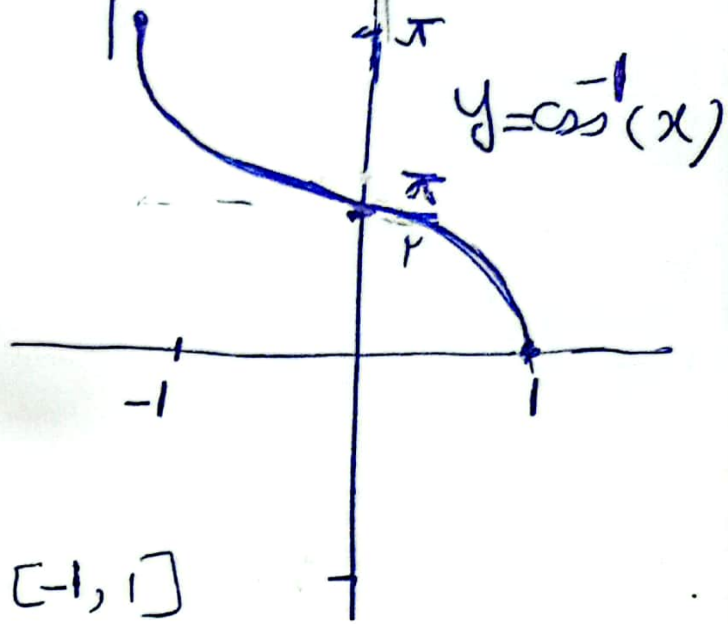
دامنه $D=\mathbb{R} \longrightarrow$ برد $R=[-1,1]$

$y=\cos(x) \Rightarrow y'=-\sin(x)$



$y=\cos(u) \Rightarrow y'=-u'\sin(u)$

$y=\cos^{-1}(x) \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x\in[-1,1]$



$y=\cos^{-1}(u)=\text{Arc}\cos(u) \Rightarrow y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$D=[-1,1] \longrightarrow R=[0,\pi]$

$u\in[-1,1]$

$\cos(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow \cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$

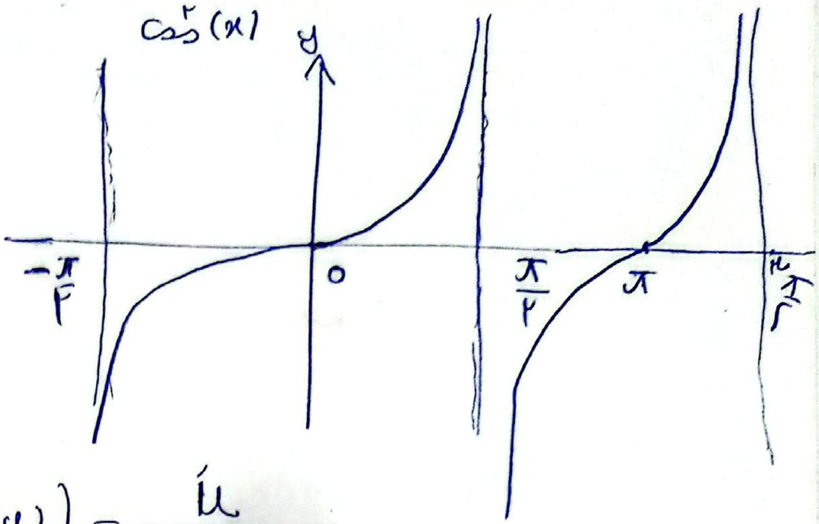
$\cos(0)=1 \Rightarrow \cos^{-1}(1)=0$

$\cos(\pi)=-1 \Rightarrow \cos^{-1}(-1)=\pi$

$$y=\tan(x) \Rightarrow y'=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$D=R-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\} \longrightarrow R=\mathbb{R}$

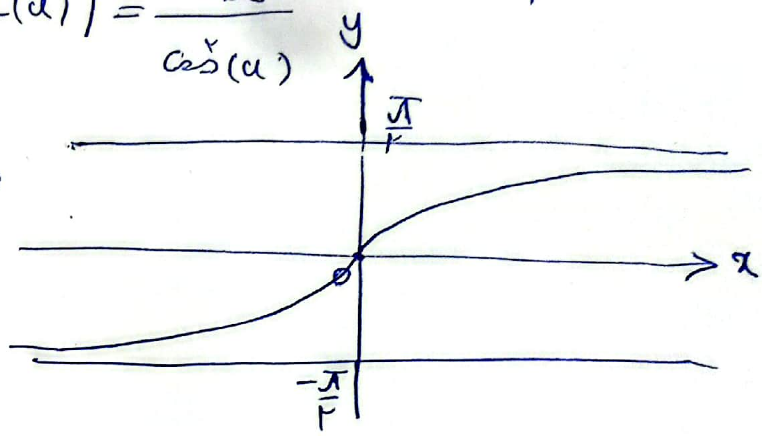
دامنه — برد



$y=\tan(x)$

دامنه $\tan(x)$ را به بازه $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ محدود می‌کنیم تا وارون آن را بدست آوریم

$$y=\tan(u) \Rightarrow y'=u'(1+\tan^2(u))=\frac{u'}{\cos^2(u)}$$



$$y=\tan^{-1}(x)=\text{Arctan}(x) \Rightarrow$$

$D=\mathbb{R} \longrightarrow R=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

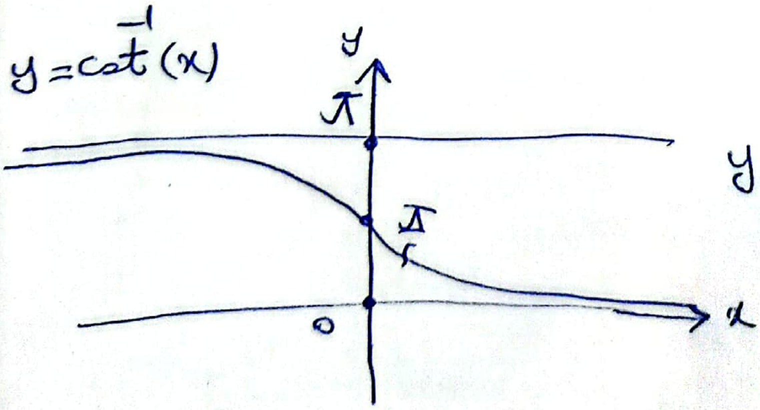
دامنه — برد

$$y'=\frac{1}{1+x^2}$$

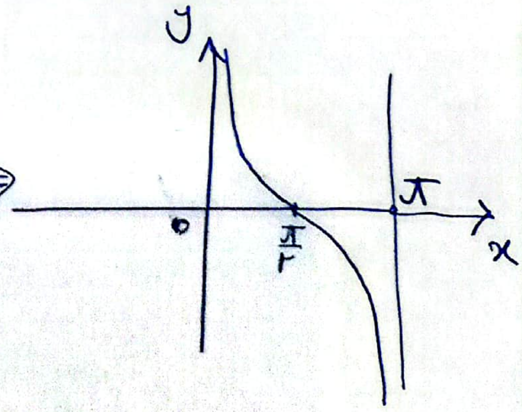
$$y=\tan^{-1}(u)=\text{Arctan}(u) \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

$$y=\cot(x) \Rightarrow y'=-(1+\cot^2(x))=\frac{-1}{\sin^2(x)}$$

$y=\cot^{-1}(x)$



$y=\cot(x) \Rightarrow$



$$y=\cot^{-1}(x)=\text{Arc}\cot(x) \Longrightarrow y'=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$y=\cot^{-1}(u)=\text{Arc}\cot(u) \Longrightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$y = \mathrm{Arc}\sin(x) = \sin^{-1}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in [-1,1]$$

$$y = \cos^{-1}(x) = \mathrm{Arc}\cos(x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in [-1,1]$$

$$y = \tan^{-1}(x) = \mathrm{Arc}\tan(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \cot^{-1}(x) = \mathrm{Arc}\cot(x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \sin^{-1}(u) \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad u \in [-1,1]$$

$$y = \cos^{-1}(u) \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad u \in [-1,1]$$

$$y = \tan^{-1}(u) \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$y = \cot^{-1}(u) \rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

مثال) $y = \left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^4 \Longrightarrow y' = 4\left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^3 \times \dfrac{6x}{\sqrt{1-(9x^4)}}$

مثال) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

مشتق تابع مقابل را بدست آورید

$$y = (x^2+4x+7)^{5x^2+3x+1}$$

$$\ln(y) = \ln(x^2+4x+7)^{5x^2+3x+1} = (5x^2+3x+1)\ln(x^2+4x+7)$$

از دو طرف مشتق میگیریم

$$\frac{y'}{y} = (10x+3)\ln(x^2+4x+7) + \frac{2x+4}{x^2+4x+7}(5x^2+3x+1) \quad \star$$

$$y' = y\left(\quad \star \quad \right)$$

$$y' = (x^2+4x+7)^{5x^2+3x+1} \quad (10x+3)\ln(x^2+4x+7) + \frac{(2x+4)(5x^2+3x+1)}{x^2+4x+7}$$

$$y = (x^3+3x+e^{2x})^{7x^3+4x} \Rightarrow \ln(y) = (x^3+3x+e^{2x})^{(7x^3+4x)}$$

$$\Rightarrow \ln(y) = (7x^3+4x)\ln(x^3+3x+e^{2x})$$

$$\frac{y'}{y} = (21x^2+4)\ln(x^3+3x+e^{2x}) + \frac{3x^2+3+2e^{2x}}{x^3+3x+e^{2x}}(7x^3+4x)$$

$$y' = (x^3+3x+e^{2x})^{7x^3+4x} \quad (21x^2+4)\ln(x^3+3x+e^{2x}) + \frac{(3x^2+3+2e^{2x})(7x^3+4x)}{x^3+3x+e^{2x}}$$

مشتق ضمنی :

توابعی که با آن‌ها سر و کار داریم ممکن است به دو صورت بیان شوند

۱) اگر تابع به صورت $y=f(x)$ بیان شود به آن تابع صریح می‌گوییم

$y=2x^4+x^2+5$ یا $y=\sqrt{x^2+1}$ یا $y=\sin(x)+\tan(x)$

۲) اگر تابع به صورت معادله‌ای برحسب x و y بیان شود آن را معادله ضمنی می‌گوییم

$x^2y+xy^2+y^4-7x+y=0$ یا $\sin^2(xy+2)=\frac{x}{2}+1$

معادله ضمنی به صورت $f(x,y)=k$ هستند که در آن k عدد ثابت است

در اینجا هم مثل تابع $y=f(x)$ ، x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است .

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$$

مثال) مشتق ضمنی مقابل را بدست آورید

$$1)\quad x^3+y^3-3xy=0 \Rightarrow y'=-\frac{(3x^2-3y)}{(3y^2-3x)}=\frac{-3x^2+3y}{3y^2-3x}$$

$$2)\quad \cos(xy)=x \xrightarrow[\text{می‌بریم}]{\text{ابتدا عبارت‌ها را به سمت چپ}} \cos(xy)-x=0 \Rightarrow y'=\frac{-f'_x}{f'_y}$$

$$\Rightarrow -\frac{(-y\sin(xy)-1)}{-x\sin(xy)}=-\frac{y\sin(xy)-1}{x\sin(xy)}$$

$$3)\quad x^2y+xy^2+y^4-7x+y=0 \Rightarrow y'=\frac{-(2xy+y^2-7)}{x^2+2xy+4y^3+1}$$

$$4)\quad x\ln(y)+y\ln(x)=x^2+y^2 \Rightarrow x\ln(y)+y\ln(x)-x^2-y^2=0$$

$$y'=-\frac{(\ln(y)+\frac{y}{x}-2x)}{\frac{x}{y}+\ln(x)-2y}$$