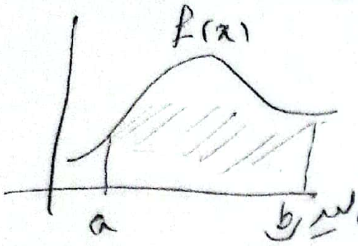
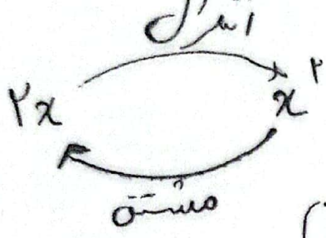
انتگرال گیری دو معنی و مفهوم در حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد

تعریف اول : انتگرال گیری یعنی یافتن مساحت محدود بین منحنی تابع $f(x)$ و محور x ها

(محاسبه مساحت زیر منحنی)



تعریف دوم : انتگرال در واقع عکس مشتق گیری است. انتگرال گیری یعنی یافتن تابعی که مشتق آن معلوم باشد



نماد انتگرال علامتی شبیه S است که مخفف کلمه sum است.

نماد انتگرال ← $\int 2x\, dx = x^2 + c$ ← نسبت به متغیر x

تابع تحت انتگرال

مقدار ثابت (معروف به ثابت انتگرال)

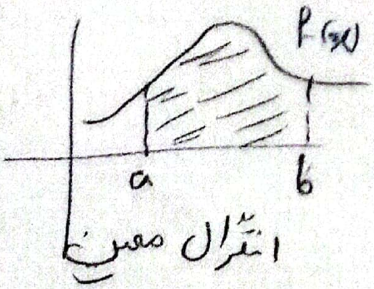
دلیل نوشتن ثابت c : ما می‌دانیم حاصل انتگرال x^2 است اما این تابع می‌تواند به صورت‌های مقابل هم باشد x^2+4 ، x^2-6 ، x^2+c ، ... و x^2

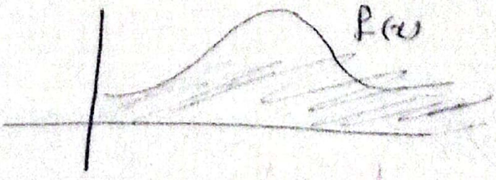
مشتق همه عبارت‌های بالا برابر $2x$ می‌شود.

انتگرال معین و نامعین : تفاوت این دو انتگرال فقط در بازه انتگرال گیری است

در هر دو مورد باید عمل انتگرال گیری انجام شود $\underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{انتگرال معین}}$ و $\underbrace{\int f(x)\, dx}_{\text{انتگرال نامعین}}$

در انتگرال معین پس از بدست آوردن حاصل باید آن را در بازه انتگرال قرار دهیم.





انتگرال معین

$\int_2^5 2x\, dx = x^2 \Big|_2^5 = (5)^2 - (2)^2 = 25 - 4 = 21$ | $\int 2x\, dx = x^2 + c$

معین : | نامعین :

خواص انتگرال معین

۱) فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشند و $C \in \mathbb{R}$ عددی ثابت

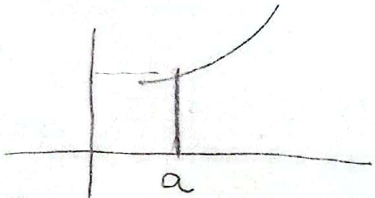
در این صورت

$$1)\ \int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

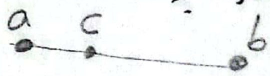
$$2)\ \int_a^b (C f(x))\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx$$

$$3)\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$4)\ \int_a^a f(x)\,dx = 0$$



۲) فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و C یک نقطه درون $[a,b]$ باشد در این



صورت $a < C < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

یعنی بازه انتگرال گیری را می‌توان به دو زیر بازه متصل بهم مثل $[a,c]$ و $[c,b]$ تقسیم کرد.

$$\int_1^5 2x\,dx = \int_1^3 2x\,dx + \int_3^5 2x\,dx$$

۳- برای هر عدد ثابت C داریم $\Leftarrow$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

$$\int c\,dx = cx + c$$

تغییر متغیر

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \Longrightarrow \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2dx \end{array} \xrightarrow{\text{یه ۲ کم داریم}} \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}(u) + C = \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x) + C$$

فرمول های انتگرال

۱) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ مثال $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

مثال $\int 2x^5\,dx = 2\int x^5\,dx = 2\times\frac{x^6}{6} = \frac{x^6}{3} + C$

$\frac{x^4}{20} + \frac{4}{5}x^5 + C$

مثال $\int\left(\frac{x^3}{5} + 4x^4\right)dx = \frac{1}{5}\int x^3\,dx + 4\int x^4\,dx = \frac{1}{5}\times\frac{x^4}{4} + 4\times\frac{x^5}{5} + C$

۲) $\int x^{-n}\,dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C$ $(n\neq 1)$ مثال) $\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{1-3}}{1-3} + C = \frac{x^{-2}}{-2}$

$= -\frac{1}{2x^2}$

$\ln|x|$ بنویسیم

۳) $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ $x\neq 0$

۴) $\int e^x\,dx = e^x + C$ ۵) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C \Rightarrow \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \Rightarrow \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

۶) $\int \sin(x)\,dx = -\cos x + C$ ۷) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ $(\sin(x))' = \cos(x)$

۸) $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$ ۹) $\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x)$

$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$ $(\cot(x))' = -(1+\cot^2(x)) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$

۱۰) $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|$ ۱۱) $\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$

مقدار مثبت تابع ln داخل قدرمطلق

مثال) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

$\int x^n\,dx$

۱۲) $\int (ax+b)\,dx = a\int x\,dx + \int b\,dx = a\frac{x^2}{2} + bx + C$

مثال) $\int (5x+10)\,dx = 5\int x\,dx + \int 10\,dx = 5\times\frac{x^2}{2} + 10x + C = \frac{5x^2}{2} + 10x + C$

۱۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) = \mathrm{Arc}\sin(x) + C$

۱۴) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1}(x) + C = \mathrm{Arc}\cos(x) + C$

۱۵) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) + C = \mathrm{Arc}\tan(x) + C$

۱۶) $\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \cot^{-1}(x) + C = \mathrm{Arc}\cot(x) + C$

۱۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ مثال) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + C$

۱۸) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ مثال) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

۱۹) $\int \frac{1}{\underbrace{(ax+b)}_{u}}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ $\quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \ (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$\frac{1}{a}\int \frac{a\times 1}{(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

1) $\int x^{\frac{3}{5}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \dfrac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \dfrac{5}{8}\sqrt[5]{x^{8}}$

2) $\int \dfrac{4x^{5}+7}{3x^{2}}\,dx = \int \left(\dfrac{4x^{5}}{3x^{2}} + \dfrac{7}{3x^{2}}\right)dx = \int \dfrac{4}{3}x^{3}\,dx + \int \dfrac{7}{3}\dfrac{1}{x^{2}}\,dx$

$= \dfrac{4}{3}\int x^{3}\,dx + \dfrac{7}{3}\int x^{-2}\,dx = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{x^{4}}{4}\right) + \dfrac{7}{3}\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right) = \dfrac{x^{4}}{3} - \dfrac{7}{3x} + C$

3) $\int \dfrac{\cos^{2}(x) - \sin^{2}(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx = \int \dfrac{(\cos(x)-\sin(x))\cdot\cancel{(\cos(x)+\sin(x))}}{\cancel{(\cos(x)+\sin(x))}}\,dx = \int(\cos(x)-\sin(x))\,dx$

$= \int(\cos(x))\,dx - \int \sin(x)\,dx = \sin x + \cos x + C$

4) $\int(\tan(x)+\cot(x))\sin(2x)\,dx \Rightarrow \tan(x)+\cot(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} + \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin^{2}x+\cos^{2}x}{\cos(x)\sin(x)}$

$= \dfrac{1}{\cos(x)\sin(x)} \Longrightarrow \int \dfrac{\sin(2x)\,dx}{\cos(x)\sin(x)} = \int \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)}\,dx = \int 2\,dx = 2x + C$

5) $\int e^{x+2}\,dx = \int e^{x}e^{2}\,dx = e^{2}\int e^{x}\,dx = e^{2}(e^{x}+C) = e^{x+2} + C$

6) $\int e^{2\ln(x)}\,dx = \int e^{\ln(x^{2})}\,dx = \int x^{2}\,dx = \dfrac{x^{3}}{3} + C$

7) $\int e^{-\ln(x)}\,dx = \int e^{\ln(x^{-1})}\,dx = \int e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx = \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

8) $\int \ln e^{\cos(x)}\,dx = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

حل) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x}+$

حل) $\int(\sqrt{x} + 2x^2 - 8)\,dx = \int(x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 - 8)\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2x^3}{3} - 8x + c$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^3 - 8x + C$

حل) $\int \frac{2x^2+1}{x}\,dx = \int \frac{2x^2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{2x^2}{2} + \operatorname{Ln}|x| = x^2 + \operatorname{Ln}|x| + C$

حل $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right) dx = \int \frac{x-1+1+2}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)+3}{x-1}\,dx =$

$= \int \left(\frac{x-1}{x-1}\right) dx + \int \frac{3}{(x-1)}\,dx = \int dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx = x + 3\operatorname{Ln}|x-1| + c$

حل) $\int \frac{dx}{x^2-4x+9} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{(x-2)}{\sqrt{5}}\right) + c$

حل) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{x^2-6x+9+4} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{(x-3)}{2}\right) + c$

روش های انتگرال گیری

۱- روش تغییر متغیر : در حل انتگرال هایی که شامل یک تابع و مشتق آن باشد از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم

مثال

$$\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \Rightarrow \begin{array}{l}\cos(x)=u\\ -\sin(x)\,dx = du\end{array} \Rightarrow -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + C \overset{u}{=} -\ln|\cos(x)| + C$$

مثال

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\overset{du}{\cos(x)}}{\underset{u}{\sin(x)}}\,dx = \qquad \sin(x)=u \Rightarrow du = \cos(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\sin(x)| + C$$

مثال)

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \qquad \ln(x)=u \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int \sin(u)\,du = -\cos u + C = -\cos(\ln(x)) + C$$

فرمول ،
$$\boxed{(\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}}$$

مثال)

$$\int \frac{\overset{du}{dx}}{\underset{u}{\tan^{-1}(x)}(1+x^2)} \qquad \tan^{-1}(x) = u \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\tan^{-1}(x)| + C$$

حل) $\int ۴x^{۳} e^{x^{۴}} dx \Rightarrow$ $\quad x^{۴} = u \Rightarrow du = ۴x^{۳} dx$

$= \int e^{u} du = e^{u} = e^{x^{۴}} + C$

ضرب در ۲

حل) $\frac{۱}{۲} \times \int ۲x^{۳} e^{x^{۴}} dx \Rightarrow$ $\quad x^{۴} = u \Rightarrow du = ۴x^{۳} dx$

$\frac{۱}{۲} \int ۴x^{۳} e^{x^{۴}} dx = \frac{۱}{۲} \int e^{u} du = \frac{۱}{۲} e^{u} + C$

$= \frac{۱}{۲} e^{x^{۴}} + C$

حل) $\int \frac{e^{۲x}}{1+e^{x}} dx$ $\quad 1 + e^{x} = u \Rightarrow du = e^{x} dx$

$= \int \frac{e^{x}}{1+e^{x}} e^{x} dx = \int \frac{u-1}{u} du =$

$\int \frac{u}{u} du - \int \frac{1}{u} du = \int du - \int \frac{1}{u} du = u - \ln|u| + C$

$(1+e^{x}) - \ln|1+e^{x}| + C$

حل) $\int \cos^{۴}(x) (\sin^{۳}(x)) dx = \int \cos^{۴}(x) \sin^{۲}(x) \sin(x) dx$

$= \int \cos^{۴}(x) (1 - \cos^{۲}(x)) \sin(x) dx = \int \cos^{۴}(x) - \cos^{۶}(x) \sin(x) dx$

$\cos(x) = u \Rightarrow du = -\sin(x) dx$

$= \int (u^{۴} - u^{۶}) -du = -\int (u^{۴} - u^{۶}) du = -\left(\frac{u^{۵}}{۵} - \frac{u^{۷}}{۷}\right) = -\frac{\cos^{۵}(x)}{۵} + \frac{\cos^{۷}(x)}{۷}$

$+ C$

روش تغییر متغیر

مثال ۱) $\int 2x\cos(x^2)\,dx \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{array}}$

$$\int 2x\cos(x^2)dx = \int \cos(\underbrace{x^2}_{u})\underbrace{2x\,dx}_{du} = \int \cos(u)du = \sin(u) + C$$
$$= \sin(x^2) + C$$

مثال ۲) $\int \frac{x}{x^2+1}dx \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x^2+1 = u \\ 2x\,dx = du \end{array}} \longrightarrow$

باید در عدد ثابت ۲ ضرب کنیم $\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{\overbrace{2x\,dx}^{du}}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|u| + C$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+1) + C$$

مثال ۳) $\int (5x+2)^7 dx \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} 5x+2 = u \\ 5\,dx = du \end{array}}$

مشاهده می‌کنیم فقط dx را داریم
پس باید در عدد ثابت ۵ ضرب و تقسیم کنیم

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int (5x+2)^7 \underbrace{5\,dx}_{du} = \frac{1}{5}\int u^7 du = \frac{1}{5}\frac{u^8}{8} + C = \frac{(5x+2)^8}{40} + C$$

مثال ۴) $\int \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x}dx \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Ln}(x) = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{array}}$ $\Rightarrow \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\operatorname{Ln}(x))^2}{2}$
$+ C$

مثال ۵) $\int (2x^3+1)^7 (x^2)\,dx \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} u = 2x^3+1 \\ du = 6x^2\,dx \end{array}}$

انتگرال را باید در ۶ ضرب و سپس تقسیم کنیم

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\int (2x^3+1)^7 \underbrace{(6x^2)dx}_{du} = \frac{1}{6}\int u^7 du = \frac{1}{6}\frac{u^8}{8} = \frac{u^8}{48} + C$$
$$= \frac{(2x^3+1)^8}{48} + C$$

مثال ۶) $\int x\cos(x^2+1)\,dx \rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\int \cos(\underbrace{x^2+1}_{u})\underbrace{2x\,dx}_{du}$

$$= \frac{1}{2}\sin(u) = \frac{1}{2}\sin(x^2+1)$$

روش جزء به جزء

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

حال از طرفین انتگرال می‌گیریم. می‌دانیم انتگرال گیری و مشتق گیری عکس هم هستند

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv - \int v\,du = \int u\,dv$$

$$\Longrightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

روش جزء به جزء

u را تابعی انتخاب می‌کنیم که پس از چند بار مشتق گیری ساده‌تر شود و سرانجام صفر شود

dv را تابعی انتخاب می‌کنیم که بتوان بارها بدون هیچ محدودیتی از آن انتگرال گرفت

$$\int x \sin(x)\,dx \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array}} \quad \sin(x)\,dx = dv$$

$$-\cos(x) = v$$

$$x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Eg

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^x}_{dv}\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{c} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array}} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

روش جزء به جزء

$$= x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{c} x = u \\ dx = du \end{array}} \quad \begin{array}{c} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array}$$

$$\Rightarrow \int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = \boxed{x e^x - e^x}$$

دو بار

$$\Longrightarrow x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

روش تغییر متغیر

$$\int \sin(3x)\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{c} 3x = u \\ 3\,dx = du \end{array}} \qquad \frac{1}{3}\int \sin(\underbrace{3x}_{u})\,\underbrace{3\,dx}_{du} = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{3}\cos(u) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

فرمول $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$

① $\int e^x \cos x \, dx$

چون دو تابع تحت انتگرال داریم که هیچکدام مشتق هم نیستند بنابراین از فرمول انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم

یکی از توابع را u در نظر بگیرید و تابع دیگر را dv در نظر بگیرید. از تابعی که u در نظر گرفتید مشتق بگیرید و از تابعی که dv در نظر گرفتید انتگرال بگیرید بنابراین

$$\cos(x) = u \Rightarrow -\sin(x)\,dx = du$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

حال از فرمول انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم $\longrightarrow$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ و جایگذاری در فرمول را انجام می‌دهیم

$$\cos(x)\,e^x - \int e^x(-\sin(x))\,dx$$

★

مشاهده می‌کنیم که باید انتگرال ★ را هم به روش جزء به جزء حل کنیم.

$$e^x\cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx$$

به روش مشابه انتگرال ★ هم به روش جزء به جزء حل می‌شود در نتیجه داریم

$$e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \underbrace{\int e^x\cos(x)\,dx}_{\star\star\ ①} \Longrightarrow$$

در اینجا مشاهده می‌کنیم که دوباره به انتگرال ① رسیدیم

بنابراین داریم

$$\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \underbrace{\int e^x\cos(x)\,dx}_{\star\star}$$

حال انتگرال ★★ را به سمت چپ تساوی می‌بریم در نتیجه داریم

$$2\int e^x\cos(x)\,dx = e^x(\cos(x) + \sin(x)) \Rightarrow \int e^x\cos(x)\,dx = \frac{e^x(\cos(x)+\sin(x))}{2}$$

روش جز به جز

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال) $\int x e^{x} dx = xe^{x} - \int e^{x} dx = xe^{x} - e^{x} + C$

$e^{x}(x-1) + C$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{x} \Rightarrow v = e^{x} \end{array}}$$

مثال) $\int Ln(x)\, dx$

$Ln(x) = u \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$= x Ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx = x Ln(x) - \int 1 dx = x Ln(x) - x + C$

مثال) $\int e^{x} \sin(x)\, dx \Longrightarrow$

$\sin(x) = u \Rightarrow du = \cos(x)\, dx$

$e^{x} dx = dv \Rightarrow v = e^{x}$

$e^{x} \sin(x) - \int e^{x} \cos(x)\, dx \Rightarrow$

$e^{x} dx = dv \Rightarrow v = e^{x}$

$\cos(x) = u \Rightarrow du = -\sin(x) dx$

$e^{x} \sin(x) - [e^{x} \cos(x) + \int e^{x} \sin(x)$

$\Rightarrow \int e^{x} \sin(x) dx = e^{x} \sin(x) - e^{x} \cos(x) - \int e^{x} \sin(x) + C$

$= 2\int e^{x} \sin(x) dx = e^{x}(\sin(x) - \cos(x)) \Rightarrow \int e^{x} \sin(x)\, dx = \frac{e^{x}(\sin(x) - \cos(x))}{2}$

مثال $\int x e^{(3x)} dx \Longrightarrow x = u \Rightarrow dx = du \;,\; e^{3x} dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$x \times \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{(3x)} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} e^{(3x)} + C = \frac{1}{3} x e^{(3x)} - \frac{1}{9} e^{(3x)} + C$

حل به روش جدولی

مشتق (u)	انتگرال (dv)
+ x	e^{3x}
− 1	$\frac{1}{3} e^{3x}$
+ 0	$\frac{1}{9} e^{3x}$

$x \times (\frac{1}{3} e^{3x}) - 1 (\frac{1}{9} e^{3x}) + C$

$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$

تغییر متغیر

$3x = u \Rightarrow 3\,dx = du$

مثال) $\int e^{3x}\,dx \Rightarrow$ بنابراین باید انتگرال را در ۳ ضرب و سپس بر ۳ تقسیم کنیم

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int e^{3x}\,3\,dx \Rightarrow$ حال که du را به طور کامل داریم می‌توانیم تغییر متغیر را انجام دهیم

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

بنابراین باید انتگرال را در ۵ ضرب و تقسیم کنیم $5x = u \Rightarrow 5\,dx = du$

مثال) $\int \cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,5\,dx$

حال می‌توانیم تغییر متغیر را انجام دهیم

$$= \frac{1}{5}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{5}\sin(u) + C = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$$

مثال) $\int x^2 \cos(x)\,dx$

مشتق u	انتگرال dv
$+x^2$	$\cos(x)$
$-2x$	$\sin(x)$
$+2$	$-\cos(x)$
-0	$-\sin(x)$

$x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$

$\int x^3 e^{2x}\,dx$

مشتق u	انتگرال dv
$+x^3$	e^{2x}
$-3x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$+6x$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
-6	$\frac{1}{8}e^{2x}$
$+0$	$\frac{1}{16}e^{2x}$

$\frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{6}{8}xe^{2x} - \frac{6}{16}e^{2x}$